令和4年度　解答例

数　学

I、IIのどちらかに○をつけること。

□　I［中学校・特別支援学校受験者］
□　II［高等学校受験者］

第1問題

I［中学校・特別支援学校受験者］

ア	必要性（1点）	イ	問題解決（1点）	ウ	構想（1点）
エ	評価（1点）	オ	数量や図形（1点）	カ	共有（1点）

II［高等学校受験者］

ア	数理的（1点）	イ	表現・処理（1点）	ウ	考察（1点）
エ	数学（1点）	オ	統合的（1点）	カ	表現（1点）

第2問題

問1	$n=$ 2、23、38、47（4点）	問2	$(13\pi+12)$ cm^2（4点）	
問3	$\frac{5}{12}$（4点）	問4	x^2-5x+4	$2x^2+x-3$（各2点）
問5	6（4点）	問6	$-1\leqq k\leqq\frac{5}{3}$（6点）	
問7	10（6点）	問8	$p=\frac{30}{49}$	標準偏差：$\frac{15}{14}$（各3点）

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第３問題

問１	△ＡＯＥと△ＣＯＦにおいて、 対頂角は等しいので、∠ＡＯＥ＝∠ＣＯＦ　…① 仮定より、四角形ＡＢＣＤは平行四辺形なので、ＥＢ//ＦＤとなり、 錯角は等しいので、∠ＯＡＥ＝∠ＯＣＦ　…② また、四角形ＡＢＣＤは平行四辺形なので、対角線はそれぞれの中点で交わるから ＡＯ＝ＣＯ　…③ ①、②、③から、１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、 △ＡＯＥ≡△ＣＯＦ 合同な図形は、対応する辺の長さが等しいので、 ＯＥ＝ＯＦ　…④ ③、④より四角形ＡＦＣＥの対角線がそれぞれの中点で交わっているので、四角形ＡＦＣＥは平行四辺形である。 （７点）
問２	題意より、$x+y$ を７で割ったときの商を m（m は０以上の整数）とすると、次の連立方程式を得る。 $\begin{cases} x+y=7m+6 & \cdots① \\ x-y=3m+2 & \cdots② \end{cases}$ ①＋②より、$2x=10m+8$　∴　$x=5m+4$ ①－②より、$2y=4m+4$　∴　$y=2m+2=2(m+1)$ よって、x は５で割ると４余る数、y は２の倍数（偶数）。 （７点）

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第４問題

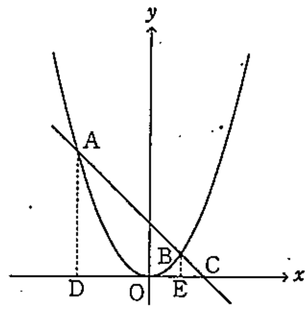
問１

$y=x^2$ と $y=-x+2$ の交点の x 座標は
$x^2=-x+2$ より、$(x+2)(x-1)=0$　$\therefore$　$x=-2$、$x=1$
$x=-2$ のとき $y=4$、
$x=1$ のとき $y=1$
A$(-2, 4)$、B$(1, 1)$

（4点）

問２

点Aから x 軸に下した垂線と x 軸との交点をD、
点Bから x 軸に下した垂線と x 軸との交点をＥとする。
ＡＤ // ＢＥであるから△ＣＡＤ∽△ＣＢＥとなり、
ＣＡ：ＣＢ＝ＡＤ：ＢＥ＝４：１
よってＡＢ：ＢＣ＝（４－１）：１＝３：１



（6点）

問３

点Ａ、Ｂの x 座標をそれぞれ $-\alpha$、β とする（$\alpha>0$、$\beta>0$）。
このとき、α、β は $y=x^2$ と $y=-x+a$ から y を消去して得られる２次方程式 $x^2+x-a=0$ の２つの解である。
△ＡＯＢと△ＢＯＣの底辺をそれぞれＡＢ、ＢＣとすると、そのときの高さは等しいので
△ＡＯＢ：△ＢＯＣ＝ＡＢ：ＢＣ
問２と同様に考えると ＣＡ：ＣＢ＝ＡＤ：ＢＥ＝$\alpha^2:\beta^2$
よって、ＡＢ：ＢＣ＝$(\alpha^2-\beta^2):\beta^2=5:4$　　$\therefore \beta=\pm\frac{2}{3}\alpha$
$\alpha>0$、$\beta>0$ より、$\beta=\frac{2}{3}\alpha$
よって、$x^2+x-a=0$ の解は、$-\alpha$ と $\frac{2}{3}\alpha$ であり

$$\begin{cases} \alpha^2-\alpha-a=0 & \cdots① \\ \frac{4}{9}\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha-a=0 & \cdots② \end{cases}$$

を満たす。
①－②より、

$$\frac{5}{9}\alpha^2-\frac{5}{3}\alpha=0$$

$\alpha>0$ より、$\alpha=3$
よって、$a=6$

（10点）

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第５問題

問１	$\angle ECD = 90^\circ$ より、$DE = \sqrt{5^2+12^2} = 13$ △ＤＦＡと△ＥＦＣで、∠ＤＦＡ＝∠ＥＦＣ（対頂角）、∠ＡＤＦ＝∠ＣＥＦ（ＡＤ // ＣＥの錯角）より、 ２組の角がそれぞれ等しいので、△ＤＦＡ∽△ＥＦＣ よって、ＤＦ：ＥＦ＝ＡＤ：ＣＥ＝８：５ ∴　$DF = 13 \times \frac{8}{8+5} = 8$ (cm) （６点）
問２	△ＤＡＦと△ＤＦＣの底辺をそれぞれＡＦ、ＦＣとすると、高さが共通なので、 △ＤＡＦ：△ＤＦＣ＝ＡＦ：ＦＣ＝８：５ △ＡＤＦはＤＡ＝ＤＦの二等辺三角形で、ＤＧは頂角である∠ＦＤＡの二等分線なので、 ＡＧ：ＧＦ＝１：１ よって、$\triangle AGD = \frac{1}{2} \times \triangle DAF = \frac{1}{2} \times \frac{8}{8+5} \times \triangle DAC = \frac{1}{2} \times \frac{8}{13} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 12\right) = \frac{192}{13}$ (cm²) （６点）
問３	Ｇを通り、辺ＡＤに垂直な直線と辺ＡＤ、 辺ＩＣとの交点をそれぞれＪ、Ｋとする。 $V_1 : V_2 = \frac{1}{3}\pi(DJ+JA)JG^2 : \frac{1}{3}\pi(CK+KI)GK^2 = AD \times JG^2 : CI \times GK^2$　…① △ＡＧＤと△ＣＧＩで、∠ＡＧＤ＝∠ＣＧＩ（対頂角）、∠ＤＡＧ＝∠ＧＣＩ（ＡＤ//ＣＩの錯角）より、 ２組の角がそれぞれ等しいので、△ＡＧＤ∽△ＣＧＩ よって、ＡＤ：ＣＩ＝ＡＧ：ＧＣ＝４：９　…② 同様に、△ＡＧＪ∽△ＣＧＫだから、ＪＧ：ＧＫ＝ＡＧ：ＧＣ＝４：９　…③ ①、②、③より、$V_1 : V_2 = 4 \times 4^2 : 9 \times 9^2 = 64 : 729$ （10点）

Ⅱ［高等学校受験者］

第３問題

問１

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となる点O、A、Bをとる。

△OABに余弦定理を用いると、$\cos\theta=\dfrac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$

この式は、θ が $0°$ や $180°$ のときも成り立つ。

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ より、

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$、$|\vec{b}|=\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}$、$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

よって、

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\
&=|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}\\
&=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2}\\
&=\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-\{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\}}{2}\\
&=a_1b_1+a_2b_2
\end{aligned}
$$

（６点）

問２

（誤っている点）

「$x\geqq 2$ として考えればよいので、

$x\geqq 2$ のとき、$x\leqq x^2-x\leqq x^2$

$\lim_{x\to\infty}x=\infty$、$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$」

ここまでは正しい。

関数におけるはさみうちの原理は、

「$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$、$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき、

x が a の近くでつねに $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ $\alpha=\beta$ ならば、$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$」

であるので、$\lim_{x\to a}f(x)$、$\lim_{x\to a}g(x)$ がそれぞれ極限値（有限確定値）をもつことが条件である。

生徒の答案ではこの条件が満たされず、

$\alpha=\infty$、$\beta=\infty$ であるにもかかわらず、

はさみうちの原理を用いている部分が誤り。　（４点）

（正しい答案）

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

ここで、$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$、$\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ であるから、

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\infty$

（４点）

Ⅱ［高等学校受験者］

第4問題

<table>
<tr><td>問1</td><td>

$S_{n+1}=\frac{1}{3}S_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{2}$ より、

$S_2=\frac{1}{3}S_1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}S_1+\frac{5}{4}$

$S_1=a_1$、$S_2=a_1+a_2$ より

$a_1+a_2=\frac{1}{3}a_1+\frac{5}{4}$

$a_1=1$ だから、$1+a_2=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}$　　よって、$a_2=\frac{7}{12}$

（5点）
</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>

$S_{n+1}=\frac{1}{3}S_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{2}$ より、$S_{n+2}=\frac{1}{3}S_{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\frac{3}{2}$

よって、$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{1}{3}(S_{n+1}-S_n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

したがって、$a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$　　ゆえに　$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

両辺を $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ で割ると、$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}a_n}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1$

$b_n=\frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ とおくと、$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+1$

これを変形すると　$b_{n+1}-3=\frac{2}{3}(b_n-3)$　より

$b_n=(b_1-3)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3=(2a_1-3)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3=-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3$

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3\right\}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^n$　よって、$a_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

（10点）
</td></tr>
<tr><td>問3</td><td>

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数、

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$ は初項 $\frac{3}{2}$、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で、

公比の絶対値がともに1より小さいから

これら2つの無限等比級数は収束する。

よって、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{9}{4}$

（5点）
</td></tr>
</table>

Ⅱ［高等学校受験者］

第５問題

問１

$f(x)=-(x^2-2x-2)e^x$ より、$f'(x)=-(2x-2)e^x-(x^2-2x-2)e^x=-(x+2)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$ とおくと、$x=-2$、$x=2$

よって、次の増減表を得る。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{6}{e^2}$	↗	$2e^2$	↘

増減表より、$x=-2$ で極小となり、極小値は $-\dfrac{6}{e^2}$

$x=2$ で極大となり、極大値は $2e^2$

（６点）

問２

接点の座標を $(t,\ -(t^2-2t-2)e^t)$ とおくと、

$f'(t)=-(t^2-4)e^t$ より、接線の方程式は、

$y=-(t^2-4)e^t(x-t)-(t^2-2t-2)e^t$

接線が点 $(0,0)$ を通るので、

$-(t^2-4)e^t(-t)-(t^2-2t-2)e^t=0$

$e^t>0$ より、$t(t^2-4)-(t^2-2t-2)=0$

$t^3-t^2-2t+2=0$

$(t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})=0$

t は整数なので、$t=1$

このとき、接線の方程式は、$y=3ex$

接点の座標は、$(1,3e)$

（６点）

問３

求める面積を S とすると、$0\leqq x\leqq 1$ では、$-(x^2-2x-2)e^x\geqq 3ex$ だから、

$S=\int_0^1\{-(x^2-2x-2)e^x-3ex\}dx$

$\quad=-\int_0^1(x^2-2x-2)e^x dx-\int_0^1 3ex dx$

ここで、$\int_0^1(x^2-2x-2)e^x dx$

$\quad=\int_0^1(x^2-2x-2)(e^x)'dx$

$\quad=\Big[(x^2-2x-2)e^x\Big]_0^1-\int_0^1(2x-2)e^x dx$

$\quad=2-3e-\int_0^1(2x-2)(e^x)'dx$

$\quad=2-3e-\Big[(2x-2)e^x\Big]_0^1+\int_0^1 2e^x dx$

$\quad=2-3e-2+\Big[2e^x\Big]_0^1$

$\quad=-e-2$

$\int_0^1 3ex dx=3e\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{3e}{2}$

よって、$S=-(-e-2)-\dfrac{3e}{2}=\dfrac{4-e}{2}$

（10点）